Taylor vortex 流の定常振幅

広島大・理 八 幡 英 雄

二つの同軸円筒間(並径 R_1, 外径 R_2)に非圧縮性粘性流体を入れ，内側の円筒を回転させ，その角度 Ω_1 を増加してゆくと，ある $\Omega_1^{(0)}$ で toroidal 状の vortex flow を生じる。[1)] この vortex 流の飽和定常振幅を計算し，実験との比較を試みた。

流速度 (u_r, u_θ, u_z) は，運動粘性率を ν とすると，つぎの Navier−Stoks 及連続の方程式で記述される：

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla u_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2 u_z\\
&\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right. \tag{1}$$

ここで $\mathbf{u}\cdot\nabla = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ で，以下定常かつ軸対称流をあつかうので $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ とする。

$\Omega_1^{(0)}$ 以下で生ずる laminar Couette 流は，よく知られているように，方位角方向への一様流で，流速 (V_r, V_θ, V_z), 圧力 P は，$\eta = R_1/R_2$ として，

$$V_r = V_z = 0,\quad V_\theta = \frac{\Omega_1\eta^2}{1-\eta^2}\left(-r + \frac{R_2^2}{1}\right),\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

で与えられる。次に方程式 (1) における流速・圧力を，流れ (2) からのずれをきめるものに書きかえ，さらに，長さを R_2, 流速を ν/R_2 を単位にして無次元化すると，

$$u_r \to \frac{\nu}{R_2} u_r,\quad u_\theta \to V_\theta + \frac{\nu}{R_2} u_\theta,\quad u_z \to \frac{\nu}{R_2} u_z,\quad \frac{p}{\rho} \to \frac{P}{\rho} + \frac{\nu^2}{R_2^2}\frac{p}{\rho},$$

$$r \to R_2 r,\qquad z \to R_2 z, \tag{3}$$

とおきかえをして，次のようになる：

$$\begin{cases} -(\partial\partial_* + \partial_z^2)u_r + \beta\left(1-\dfrac{1}{r^2}\right) u_\theta + \partial\dfrac{p}{\rho} = -u_r\,\partial u_r - u_z\,\partial_z u_r + \dfrac{u_\theta^2}{r}, \\ -\beta u_r - (\partial\partial_* + \partial_z^2)u_\theta = -u_r\,\partial_* u_\theta - u_z\,\partial_z u_\theta, \\ -(\partial_*\partial + \partial_z^2)u_z + \partial_z\dfrac{p}{\rho} = -u_r\,\partial u_z - u_z\,\partial_z u_z, \\ \partial_* u_r + \partial_z u_z = 0, \end{cases} \tag{4}$$

ここで境界条件は $r=1$ および η で $\mathbf{u}=0$ で，$\partial = \dfrac{\partial}{\partial r}$，$\partial_* = \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}$，さらに，

$\beta = \dfrac{2R_1^2\Omega_1}{\nu(1-\eta^2)} = \dfrac{2\eta\,Re}{(1-\eta)(1-\eta^2)}$，$Re = \dfrac{\Omega_1 R_1(R_2-R_1)}{\nu}$ は外部パラメタである。

Taylor vortex 流の閾値 $\beta^{(0)}$ 付近での振幅が，パラメタ β の $\beta^{(0)}$ からのずれ $\beta-\beta^{(0)}$ の適当の巾であらわされる小さな量として，Malkus–Veronis[2] にならって小パラメタ ε による次の展開を行うと，

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \varepsilon\,\mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2\,\mathbf{u}^{(2)} + \varepsilon^3\,\mathbf{u}^{(3)} + \cdots\cdots \\ \dfrac{p}{\rho} = \varepsilon\,\pi^{(1)} + \varepsilon^2\,\pi^{(2)} + \varepsilon^3\,\pi^{(3)} + \cdots\cdots \\ \beta - \beta^{(0)} = \varepsilon\,\beta^{(1)} + \varepsilon^2\,\beta^{(2)} + \cdots\cdots \end{cases} \tag{5}$$

ここで各次数の函数およびパラメタは，方程式 (4) の Fredholm 可解条件及解の一意性の条件から，低次より逐次求めてゆく。円筒が軸方向（z 方向）に無限に長いとし，さらに (4) の z に関する対称性を考慮して，$\mathbf{u}^{(n)}$，$\pi^{(n)}$ を次のように Fowier 級数に分解すると，

$$\left\{\begin{aligned}
u_r^{(n)}(r,z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell^{(n)}(r)\cos \ell a z\\
u_\theta^{(n)}(r,z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} v_\ell^{(n)}(r)\cos \ell a z\\
u_z^{(n)}(r,z) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} w_\ell^{(n)}(r)\sin \ell a z\\
\pi^{(n)}(r,z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_\ell^{(n)}(r)\cos \ell a z
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

(5), (6) を (4) に代入して，各展開成分〔n，ℓ〕に関する方程式を得る。〔 n＝1，ℓ＝1〕の成分は，閾値 $\beta^{(0)}$ とそれに対応する流速 ($u_1^{(1)}$, $v_1^{(1)}$, $w_1^{(1)}$) をきめる固有値方程式で，$w_1^{(1)}$, $\pi_1^{(1)}$ を消去して，

$$\left\{\begin{aligned}
&(\partial\partial_* - a^2)^2\, u_1^{(1)} + \beta^{(0)} a^2 \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) v_1^{(1)} = 0\\
&\beta^{(0)} u_1^{(1)} + (\partial\partial_* - a^2)\, v_1^{(1)} = 0\ ,
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

となる。境界条件は r＝1，η で $u^{(1)} = \partial u_1^{(1)} = v_1^{(1)} = 0$ である。$\beta^{(0)}$ はTaylor vortex の波数 a の函数として求まるが (中立安定曲線)， $\beta^{(0)}$ を最小にするような a_c が supercritical state で vortex 流の最大線型成長率を与えるので，以下の定常飽和振幅の計算では $a = a_c$ とおく。[3] (7) を数値的に解くには，いろいろの方法があるが，ここでは Chandrasekhar 流の基底函数を用いた Galerkin 法を用いた。[4] 成分〔n＝2，ℓ＝1〕の Fredholm 可解条件から，$\beta^{(2)}$ を決める次式を得る ：

$$\begin{aligned}
&-\frac{8\beta^{(2)}}{\beta^{(0)}}\int_\eta^1 dr\, r\left[\tilde{u}_1^{(1)}(\partial\partial_* - a^2)^2\, u_1^{(1)}\right]\\
&= \int_\eta^1 dr\, r\ \tilde{u}_1^{(1)}\Big[u_1^{(1)}(\partial_*\partial\partial_* u_2^{(2)}) + 2(\partial_* u_1^{(1)})(\partial\partial_* u_2^{(2)})\\
&- (\partial\partial_* u_1^{(1)})(\partial_* u_2^{(2)}) - 2(\partial_*\partial\partial_* u_1^{(1)})\, u_2^{(2)} - \frac{2}{r}\, u_1^{(1)}\partial\partial_* u_2^{(2)}\\
&+ \frac{4}{r}(\partial\partial_* u_1^{(1)})\, u_2^{(2)} - a^2\left\{3u_1^{(1)}\partial_* u_2^{(2)} + 6(\partial_* u_1^{(1)})\, u_2^{(2)} - \frac{4}{r}\, u_1^{(1)} u_2^{(2)}\right\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{4}{r}(\beta^{(0)}a)^2\chi_1^{(1)}(2\chi_0^{(2)}+\chi_2^{(2)})] + (\beta^{(0)}a)^2\int_\eta^1 dr\,r\,\tilde{\chi}_1^{(1)}[2u_1^{(1)}\partial_*\chi_2^{(2)}$$

$$+4(\partial_* u_1^{(1)})\chi_2^{(2)} + \chi_1^{(1)}(\partial_* u_2^{(2)}) + 2(\partial_*\chi_1^{(1)})u_2^{(2)} + 4u_1^{(1)}\partial_*\chi_0^{(2)}], \qquad (8)$$

ここで $v_1^{(1)}=\beta^{(0)}\chi_1^{(1)}$ で，$v_0^{(2)}(r)=\beta^{(0)}\chi_0^{(2)}$ は成分〔$n=2$，$\ell=0$〕の解，$u_2^{(2)}(r)$，$v_2^{(2)}(r)=\beta^{(0)}\chi_2^{(2)}(r)$ は成分〔$n=2$，$\ell=2$〕の解，$\tilde{u}_1^{(1)}(r)$，$\tilde{v}_1^{(1)}(r)=\beta^{(0)}a^2\chi^{(1)}$ は (7) の共軛固有値方程式の解である。(8) から得られる $\varepsilon^2=(\beta-\beta^{(1)})/\beta^{(2)}$ を用いて，(5) から $\mathbf{u}$ の飽和振幅を計算することができる。

(i) 外円筒における平均偶力の測定[5)]

$\eta=0.5$ の場合に $R=R_2$ で，$\ell=0$ 成分からの偶力への寄与を測定し，

$$G(\mathrm{dyn.cm}) = \begin{cases} 1.069\,Re, & (Re \le R_e^{(0)} = 67.89) \\ -69.91+2.071\,Re, & (R_e^{(0)} \le Re \lesssim 149) \end{cases} \qquad (9)$$

が報告されている。偶力は応力 $\sigma_{r\theta}|_{r=R_2}$ に比例すると考えられ，$R_e^{(0)}$ の上と下での G の勾配の差 $\delta=1.002$ は Taylor vortex 流によるもので，Galerkin 基底函数を 4 項とった結果，

$$\delta = -\frac{4\pi\eta\ \rho\nu^2 h}{(1-\eta)(1-\eta^2)}\ \frac{\beta^{(0)}}{\beta^{(2)}}\ \frac{\partial\chi_0^{(2)}(r')}{\partial r'}\bigg|_{r'=1} = 0.983, \qquad (10)$$

$R_e^{(0)}=68.21$ を得た。

(ii) 光散乱による流速振幅 $u_r(r=\frac{R_1+R_2}{2}, z)$ の測定[6)]

$\eta=0.6122$ の場合に，水に浮べたラテックス分子の散乱から，

$$u_r(\frac{R_1+R_2}{2}, z) = (0.145\pm0.013)\,\xi^{0.50\pm0.03}\cos az$$

$$+(0.063\pm0.005)\,\xi^{0.77\pm0.03}\cos 2az + \cdots\cdots\ (\mathrm{cm.\ sec^{-1}}), \qquad (11)$$

$$\xi = \frac{\beta-\beta^{(0)}}{\beta^{(0)}},\quad a=3.20(\mathrm{cm^{-1}}),\quad \beta^{(0)}=370.4$$

が得られている。我々の計算結果は，

$$u_r\left(\frac{R_1+R_2}{2},\ z\right) = 0.126\ \xi^{\frac{1}{2}} \cos az + 0.0951\ \xi \cos 2az + \cdots\cdots, \tag{12}$$

$$a = 3.19\ (\mathrm{cm}^{-1}),\quad \beta^{(0)} = 365.8$$

となり，(11) の$\cos 2az$ の振幅が $\xi^{0.77\pm0.03}$ になる理由は不明である。

Taylor 不安定性は Bénard 不安定性とならんで。外部パラメタの変化によって，段階的に乱流状態へ遷移する典型的な問題といえる。[7] 今後さらに higher instabilities をも含めて，この問題に対する定性的・定量的理解が深まることが期待される。

参考文献

1) G. I. Taylor, Phil. Trans. **A223** (1923), 289
K. Kirchgässner and P. Sorger, Quart. J. Mech. Appl. Math. **22** (1969), 183

2) W. V. R. Malkus and G. Veronis, J. Fluid Mech. **4** (1958), 225.

3) Bénard 問題の場合 roll の波数が supercritical state で減少することが実験的に知られているが (cf. E. L. Koschmieder, Adv. in Chem. Phys. **26** (1974) pp. 177ff.), Taylor vortex の波数は変化しないという実験報告がある (J. E. Burkhalter and E. E. Koschmieder, J. Fluid Mech. **58** (1973), 547).
supercritical state における roll や vortex の波数がどのような機構で決まるのかは supercritical state 安定性と密接に関連し，まだ不明な点が多いように思われる。

4) S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford, 1961), §§ 73 134.

5) R. J. Donnelly, Proc. Roy. Soc. **A246** (1958), 312.
R. J. Donnelly and N. J. Simon, J. Fluid Mech. **7** (1960), 401.

6) J. P. Gollub and M. H. Freilich, Phys. Rev. Lett. **33** (1974), 1465.

7) J. P. Gollub and H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **35** (1975), 927.